

振動数依存性を有する関数の時間領域変換法の適用性検討

A Study on Applicability of Time Domain Transform Methods for Frequency Dependent Functions

中村 尚弘*1

梗概

著者はこれまで、振動数依存性を示す動的剛性の時間領域変換法について検討し提案を行ってきた。本報では既往の検討結果に基づき、以下を行った。まず、変換法の概要を示し、これまで変換した代表的な関数を3種類に分類し、各々の特徴を検討した。また、既往の検討が剛性の変換に限定されていたことから、より一般的な関数への適用性を調べるため、動的柔性や伝達関数の変換を検討した。さらに、時間領域伝達関数を提案し、その適用性を確認した。

キーワード：振動数依存性，時間領域，インパルス応答，時刻歴応答解析，時間領域伝達関数

Summary

The author has studied and proposed transform methods of frequency dependent dynamic stiffness into time domain functions. In this paper, the outline of the proposed methods was described, first. Then, typical functions transformed in the previous papers were classified into 3 groups, and these characteristics were studied. The previous studies were limited only for the dynamic stiffness. The transform of dynamic flexibility functions and transfer functions were studied to confirm the applicability of the method for more general functions. Moreover, the time domain transfer functions were proposed and the applicability was confirmed.

Keywords: frequency dependency, time domain, impulse response, time history response analysis, time domain transfer function

1 はじめに

著者はこれまで、強い振動数依存性を有する動的剛性の時間領域変換法について検討を行ってきた。まず成層地盤上の剛基礎のインピーダンスを時間領域に変換し、これを用いた時刻歴応答解析を行う方法を示した^{1)~3)}。次にこれを建物が成層地盤や不均質地盤に埋込まれた場合に拡張し、理論解やFEMにより算定された地盤インピーダンスの時間領域変換と時刻歴応答解析の適用性を示した^{4)~6)}。

また一般に材料の減衰は振動数にあまり依存しないことが知られており、この特性を表すため、振動数領域の解析では、通常複素減衰が用いられる。しかし、この減衰は非因果的な特性を持つことが指摘されている。因果的とは、「原因」の後にその「結果」が生じる時間的前後関係を満たす状態をいう。逆に非因果的とは、この時間的前後関係が壊れ、原因の前に結果の一部が生じている状態をいう。振動数領域ではこのような状態でも解析可能であるが、現実の世界（時間領域）ではあり得ない状態である。この減衰を用いた場合、地盤剛性も非因果的となり、時間領域変換がさらに困難（理論上は不可能）となる。減衰定数が小さい場合はこの影響が微小で無視できるため、上記の時間領域変換でも対応可能であったが、減衰定数が大きな場合には対応不能となっていた。そこで、大きな履歴減衰を有する非因果的なインピーダンスを近似的に変換する方法⁷⁾を提案し、これまでに示した変換法をA~C法として整理した^{8), 9)} (2章参照)。

振動数依存性を有する関数の時間領域変換が可能であれば、望ましい振動数依存性を持つ関数を自ら作成し、時間領域変換することで、新たなモデルを構築できる。その一例として、振動数領域での虚数単位 i を因果的な関数で近似し時間領域変換することで、複素ばねの近似的な時間領域表現である、因果的履歴減衰モデルを作成した^{10), 11)}。

*1 技術研究所 主任研究員 博士(工学) Chief Researcher, Research & Development Institute, Dr. Eng.

また、このようなモデル構築をより合理的に行う方法として、実部もしくは虚部のみのデータより時間領域変換を行う方法を提案した^{12), 13)}。

また、歪振幅に応じて特性の変化する地盤や粘弾性ダンパーを例とし、振動数依存性と歪振幅依存性をともに有する非線形問題への時間領域変換法の適用性を示した^{14)~16)}。さらに、温度・歪振幅・振動数に依存する粘弾性ダンパーの時刻歴応答解析法について検討を行った¹⁷⁾。一方で、FLUSH¹⁸⁾等に用いられている高精度な波動境界であるエネルギー伝達境界^{19)~21)}の実体が、振動数依存の地盤インピーダンス・マトリクスであることから、これを変換して時間領域のエネルギー伝達境界を作成し²²⁾、非線形地震応答解析を行った²³⁾。

本報では、これまでの変換対象の関数が動的剛性に限られていたことから、本変換法のより一般的な関数への適用性を検討するため、以下を行う。

まず、これまでに提案された変換法の概要をより一般的な表現で示し、その特徴を整理する。次に、これまで変換してきた代表的な関数を分類し、それらの特徴を整理する。

また、一般的な関数の代表例として動的柔軟性と伝達関数の時間領域変換を行い、適用性を評価する。特に、変換で得られた時間領域の伝達関数に関して、応答計算への適用性を検討する。

なお、「インパルス応答」という語は、一般にコンプライアンス関数の時間領域変換量を表す場合が多いが、本報ではインピーダンスや伝達関数など全ての時間領域変換量について、この語を用いることとする。

2 提案した時間領域変換法の概要

以下に、著者の提案した時間領域変換法とその特徴について概説する。従来は、動的剛性を変換の対象としていたため、それに限定した表現となっていた（文献8, 9参照）。本報では変換対象を一般的な複素関数に拡張するため、用語・表記も見直した。Table 1に、複素剛性を対象とした従来の変換法の表記と、一般的な複素関数を対象とした本報の表記の対応を示す。またTable 2に、インパルス応答成分の呼称と表記の対応を示す。

Table 1 変換法の表記の対応
Correspondence of notations of transform methods

	従来表記	本報表記
入力値 (時間領域)	$u(t), \dot{u}(t), \ddot{u}(t)$	$x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)$
〃 (振動数域)	$u(\omega)$	$x(\omega)$
出力値 (時間領域)	$F(t)$	$y(t)$
〃 (振動数域)	$F(\omega)$	$y(\omega)$
変換するデータ点	$D(\omega)$	$D(\omega)$
近似された複素関数	$S_a(\omega) \sim S'_c(\omega)$	$H_a(\omega) \sim H'_c(\omega)$

Table 2 インパルス応答成分の呼称と表記の対応
Correspondence of names and notations of impulse response

従来呼称	従来表記	本報呼称	本報表記
剛性項	k_j	0次係数項	${}_0h_j$
〃 同時成分	k_0	〃 同時成分	${}_0h_0$
減衰項	c_j	1次係数項	${}_1h_j$
〃 同時成分	c_0	〃 同時成分	${}_1h_0$
質量項同時成分	m_0	2次係数項同時成分	${}_2h_0$

2.1 A法：基本的な方法

振動数依存性を有する複素関数を $D(\omega)$ とし、その時間領域変換を考える。 $D(\omega)$ について N 個の複素数値 $D(\omega_1), D(\omega_2), \dots, D(\omega_N)$ (以下、データ点という) が与えられているとする。ただし $0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_N$ とする。 $D(\omega)$ の時間領域変換は、このデータ点を全て通り、データ点間を滑らかに内挿し、かつ因果的 (= 因果律を満たす) 関数に近似することと等価であると考えることができる。

その最も基本的な方法として (1) 式がある。 $H_a(\omega)$ は近似された複素関数、 $y_a(\omega), x(\omega)$ は振動数領域の出力値と入力値である。 $t_j = \Delta t^* j$ ($j = 0 \sim N-1$) である。 ${}_0h_j, {}_1h_j$ は実数の未定定数で、連立1次方程式を解くことにより決定できる。詳細は2.4節で後述する。

Δt としてはデータ点の最大振動数 ($f_{max} = \omega_N / 2\pi$) の逆数か、それに近い値が推奨される。 Δt は、時刻歴応答解析の時間刻み (ΔT) と一致する必要は無く、多くの場合 $\Delta T < \Delta t$ となる。例えば、 $\Delta T = 0.01$ 秒、 $\Delta t = 0.1$ 秒とすれば、時間遅れ成分に関する計算に用いる過去の変位や速度は、時刻歴解析結果の10個おきの値を用いることになる。

時間領域では、(1) 式は (2) 式で表される。 $y_a(t), x(t), \dot{x}(t)$ は各々時刻 t (以下、現在時刻という) の出力値、入力値、入力値の1次導関数 (以下、入力1次微分値という) である。(2) 式は、現在時刻の出力値が、現在時刻と過去の入力状態量 (入力値とその1次微分値) に依存することを示している。

この方法を以下、A法と呼ぶ。また ${}_0h_j$ を0次係数項、 ${}_1h_j$ を1次係数項と呼ぶこととする。 ${}_0h_j, {}_1h_j$ のうち、現在の入力状態量に係る ${}_0h_0, {}_1h_0$ を同時成分、過去の状態量に係る ${}_0h_1 \sim {}_0h_{N-1}, {}_1h_1 \sim {}_1h_{N-1}$ を時間遅れ成分と呼ぶ。

$$\left. \begin{aligned} y_A(\omega) &= H_A(\omega) \cdot x(\omega) \\ H_A(\omega) &= i\omega \cdot h_0 + {}_0h_0 + \left\{ i\omega \cdot \sum_{j=1}^{N-1} {}_1h_j \cdot e^{-i\omega t_j} + \sum_{j=1}^{N-1} {}_0h_j \cdot e^{-i\omega t_j} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$y_A(t) = {}_1h_0 \cdot \dot{x}(t) + {}_0h_0 \cdot x(t) + \left\{ \sum_{j=1}^{N-1} {}_1h_j \cdot \dot{x}(t-t_j) + \sum_{j=1}^{N-1} {}_0h_j \cdot x(t-t_j) \right\} \quad (2)$$

2.2 B法：仮想質量を考慮する方法

文献18では、A法の改良を検討した。まず変換の精度を向上させるため、2次係数項同時成分 ${}_2h_0$ を追加し $H_B(\omega)$ 及び $y_B(t)$ とした(3)、(4)式参照)。 ${}_2h_0$ は現在時刻の入力2次微分値に係る値であり、地盤インピーダンスの変換ではこの値は仮想質量に相当する。この方法をB法と呼ぶ。

$$\left. \begin{aligned} y_B(\omega) &= H_B(\omega) \cdot x(\omega) \\ H_B(\omega) &= -\omega^2 \cdot {}_2h_0 + i\omega \cdot {}_1h_0 + {}_0h_0 \left\{ i\omega \cdot \sum_{j=1}^{N-2} {}_1h_j \cdot e^{-i\omega t_j} + \sum_{j=1}^{N-1} {}_0h_j \cdot e^{-i\omega t_j} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$y_B(t) = {}_2h_0 \cdot \ddot{x}(t) + {}_1h_0 \cdot \dot{x}(t) + {}_0h_0 \cdot x(t) \left\{ \sum_{j=1}^{N-2} {}_1h_j \cdot \dot{x}(t-t_j) + \sum_{j=1}^{N-1} {}_0h_j \cdot x(t-t_j) \right\} \quad (4)$$

多くの場合、時間遅れ成分は j が大きいくほど小さな値となる傾向がある。これは、現在の出力値には近い過去の入力状態量が大きく影響し、遠い過去の状態量の影響は小さい、という性状に相当し現象的には理解できる(もちろん例外もある)。もし算定された時間遅れ成分のうち、最初の n' 個の時間遅れ成分が有意な値であり、それ以降の値が無視できるのであれば、(1)~(4)式の Σ の上限を $N-1$ や $N-2$ から、 n' に低減することが可能となる。この考えを(3)、(4)式に適用すると、(5)、(6)式となる。ここで $n' < N-1$ である。ただしこの場合、 $H'_B(\omega)$ はもとのデータ点の近くを通るものの、データ点上は通らなくなる。

$$H'_B(\omega) = -\omega^2 \cdot {}_2h_0 + i\omega \cdot {}_1h_0 + {}_0h_0 + \left\{ i\omega \sum_{j=1}^{n'} {}_1h_j \cdot e^{-i\omega t_j} + \sum_{j=1}^{n'} {}_0h_j \cdot e^{-i\omega t_j} \right\} \quad (5)$$

$$y'_B(t) = {}_2h_0 \cdot \ddot{x}(t) + {}_1h_0 \cdot \dot{x}(t) + {}_0h_0 \cdot x(t) \left\{ \sum_{j=1}^{n'} {}_1h_j \cdot \dot{x}(t-t_j) + \sum_{j=1}^{n'} {}_0h_j \cdot x(t-t_j) \right\} \quad (6)$$

2.3 C法：非因果性が強い場合の修正方法

$D(\omega)$ が因果的でない場合には、厳密には時間領域変換は不可能である。しかし近似的には可能である場合がある。非因果的なデータ点を(5)式で近似すると、実部・虚部に差異を生じる傾向がある。そこで実部の同時成分である ${}_0h_0$ 、 ${}_2h_0$ を修正し(7)式とする。ここで Δ_0h_0 、 Δ_2h_0 は最小二乗法により(8)、(9)式で求めた修正値である。

$$\text{Re}(H'_c(\omega)) = \text{Re}(H'_B(\omega)) - \omega^2 \cdot \Delta_2h_0 + \Delta_0h_0 \quad (7)$$

ここで、

$$\Delta_2h_0 = \frac{V_3n' - V_2V_4}{V_1n' - V_2^2}, \quad \Delta_0h_0 = \frac{V_2V_3 - V_1V_4}{V_1n' - V_2^2} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \sum_{i=1}^{n'} \omega_i^4, \quad V_3 = \sum_{i=1}^{n'} \omega_i^2 \{ \text{Re}(H'_B(\omega_i)) - \text{Re}(D(\omega_i)) \} \\ V_2 &= \sum_{i=1}^{n'} \omega_i^2, \quad V_4 = \sum_{i=1}^{n'} \{ \text{Re}(H'_B(\omega_i)) - \text{Re}(D(\omega_i)) \} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

同様に、虚部の同時成分である ${}_1h_0$ を修正し(10)式とする(文献19参照)。ここで Δ_1h_0 は最小二乗法により(11)、(12)式で求めた修正値である。この方法をC法と呼ぶ。

$$\text{Im}(H'_c(\omega)) = \text{Im}(H'_B(\omega)) + \omega \cdot \Delta_1h_0 \quad (10)$$

$$\Delta_1h_0 = \frac{-V_5}{V_2} \quad (11)$$

$$V_s = \sum_{i=1}^n \omega_i \{ \text{Im}(H'_B(\omega_i)) - \text{Im}(D(\omega_i)) \} \quad (12)$$

変換対象が動的剛性で複素減衰を用いた振動数領域の解析より得られた場合、減衰定数が大きいほど非因果的な関数となる。上記変換法のうち、データ点がほぼ因果的な場合にはB法、非因果性が強い場合にはC法が推奨される。

2.4 連立方程式による未知数の決定

A法～C法のいずれにおいても、インパルス応答の成分（同時成分 ${}_0h_0, {}_1h_0, {}_2h_0$ および時間遅れ成分 ${}_1h_1, {}_2h_1$ ）は、これらを未知数とし、 N 個の複素数のデータ点 $D(\omega_1), D(\omega_2), \dots, D(\omega_N)$ を既知数とする連立方程式を解くことにより決定できる。以下に、例としてB法の場合について示す（C法も共通）。

B法の(3)式は実部、虚部と分けて(13)式で表せる。この関係を複素剛性の N 個($D(\omega_1) \sim D(\omega_N)$)のデータに対してマトリクス表示したものが(14)式及び(15)式である。すなわち $2N \times 2N$ の係数マトリクスを有する連立方程式(14)式を解けば、未知数であるインパルス応答の値(${}_0h_0 \sim {}_{N-1}h_{N-1}, {}_1h_0 \sim {}_{N-2}h_{N-2}, {}_2h_0$)を算定することができる。なお、 $\omega = 0$ でのデータ $D(\omega)$ を用いると、(13)式の虚部($S_I(\omega)$)の右辺の係数が全て0のため(14)式が特異となり、計算不能となるので注意する。

$$\{S(\omega_i)\} = \begin{Bmatrix} S_R(\omega_i) \\ S_I(\omega_i) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{j=0}^{N-1} \cos \theta_{ij} h_j + \omega_i \sum_{j=0}^{N-2} \sin \theta_{ij} h_j - \omega_i^2 h_0 \\ - \sum_{j=0}^{N-1} \sin \theta_{ij} h_j + \omega_i \sum_{j=0}^{N-2} \cos \theta_{ij} h_j \end{Bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{Bmatrix} D(\omega_1) \\ \vdots \\ D(\omega_N) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{C}_0] & [\bar{C}_1] & [\bar{C}_2] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ G_2 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

ここで $\theta_{ij} = \omega_i \cdot t_j$, $t_j = \Delta t \cdot j$ とすれば、

$$\left. \begin{aligned} D(\omega_i) &= \begin{Bmatrix} \text{Re}[D(\omega_i)] \\ \text{Im}[D(\omega_i)] \end{Bmatrix}, \quad G_0 = \begin{Bmatrix} {}_0h_0 \\ {}_0h_1 \\ \vdots \\ {}_0h_{N-1} \end{Bmatrix}, \quad G_1 = \begin{Bmatrix} {}_1h_0 \\ {}_1h_1 \\ \vdots \\ {}_1h_{N-2} \end{Bmatrix}, \quad G_2 = {}_2h_0 \\ [\bar{C}_0] &= \begin{bmatrix} \{\bar{c}_{01,0}\} & \cdots & \{\bar{c}_{01,N-1}\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \{\bar{c}_{0N,0}\} & \cdots & \{\bar{c}_{0N,N-1}\} \end{bmatrix}, \quad [\bar{C}_1] = \begin{bmatrix} \{\bar{c}_{11,0}\} & \cdots & \{\bar{c}_{11,N-2}\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \{\bar{c}_{1N,0}\} & \cdots & \{\bar{c}_{1N,N-2}\} \end{bmatrix}, \quad \{\bar{C}_2\} = \begin{Bmatrix} \{\bar{c}_{21}\} \\ \vdots \\ \{\bar{c}_{2N}\} \end{Bmatrix} \\ \{\bar{c}_{0ij}\} &= \begin{Bmatrix} \cos \theta_{ij} \\ -\sin \theta_{ij} \end{Bmatrix}, \quad \{\bar{c}_{1ij}\} = \begin{Bmatrix} \omega_i \cdot \cos \theta_{ij} \\ \omega_i \cdot \sin \theta_{ij} \end{Bmatrix}, \quad \{\bar{c}_{2i}\} = \begin{Bmatrix} -\omega_i^2 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

2.5 変換法の特徴

提案変換法の特徴は、以下のように整理できる。

1) 2系列のインパルス応答を使用

この点が、既往の主な変換方法（例えば逆フーリエ変換²⁴⁾、減退記憶理論²⁵⁾、分数次導関数²⁶⁾）のいずれとも異なり、本法の最大の特徴であるといえる。

2) 有限な振動数域内の離散的なデータにより変換が可能

本法では有限な振動数域内($0 \sim \omega_N$)で離散的に与えられた複素データを対象とする。変換方法によっては、複素剛性の $\omega \rightarrow \infty$ の性状の予測が求められる場合があるが、本法では不要である。また変換に用いるデータも比較的少数(10～40個程度)で良い。

3) 因果律が自動的に満足される

逆フーリエ変換等の方法だと、因果律が損なわれる場合が生じる。これを避けるために複素剛性の実部もしくは虚部からHilbert変換により他を算定する方法があるが、もとの関数を歪める原因となる。本法では、インパルス応答の成分を $t \geq 0$ の範囲で考慮するため、因果律は常に満たされる。

4) 同時成分の分離を必要としない

逆フーリエ変換等の方法だと、複素剛性が $-\infty < \omega < \infty$ で積分可能である必要がある。このためこれを満たさない特異成分（同時成分に対応）を変換前に除去する必要があるが、そのためには複素剛性の $\omega \rightarrow \infty$ の性状を推定する必要がある。本法では、同時成分を含めたまま変換が可能であるため、同時成分の分離も、無限域での性状予測も、共に不要である。

5) 非因果的な関数も近似的に変換が可能

複素剛性が非因果的な場合でも、近似的に因果的なインパルス応答に変換が可能である。その意味では、本法は非因果関数の因果化近似が可能であるといえる。ただし程度の問題があり、非因果性が極めて強い場合には、因果化が行われるものの、もとの関数からの乖離が大きく満足な結果とはならない。

6) 得られるインパルス応答が少数

本法の変換により得られる2系列のインパルス応答の成分数は、各々 N もしくは $N-1$ で複素剛性のデータ点数(N)とほぼ同数である。しかしこれらのうち微小で無視できる成分が少なくないため、有意な成分の数 n' は比較的少数となる（既往の例では各系列10個以下）。このため、時刻歴応答解析における演算の負荷も比較的小さい。なお本法で得られるインパルス応答の時間刻み(Δt)は通常、時刻歴応答解析の時間刻み(ΔT)より大きい値となる（既往の例では、 $\Delta T=0.005\sim 0.01$ 秒に対し $\Delta t=0.05\sim 0.1$ 秒程度）。すなわち、時刻歴応答解析で用いる過去の変位や速度は、飛び飛びの値（例えば $\Delta T=0.01$ 秒、 $\Delta t=0.1$ 秒のときは10個飛ばしの値）を用いる。

7) 変換の精度が高い

既往の例では、非因果性が極めて強い場合を除き、インパルス応答の各系列10個以下で、もとの複素剛性を良好に近似できた。

3 これまでの主な変換結果の分類と整理

Table 3に、これまで検討してきた代表的な変換事例を示す。これらは、インパルス応答の特性により、以下の3種に分類できる。

- (1) 調和振動的なインピーダンス (No.1, 2)
- (2) 遮断振動数を有するインピーダンス (No.3, 4)
- (3) Maxwell要素、粘弾性体及び類似のインピーダンス (No.5~8)

以下では、各々の特性について分析と整理を行う。

3.1 調和振動的なインピーダンス (No.1, 2)

No.1は二層地盤上剛基礎 (Fig.1参照)の水平地盤インピーダンス、No.2は二層地盤に埋込まれた建屋の地盤インピーダンス・マトリクスのうち非対角成分（地中点位置で強制加振した場合の地上点位置での反力）である。両者のインピーダンスはともに大きく波打っている。同Tableの最右欄は、振動数依存性の主因となっている時間遅れ成分のみを用いて再現したインピーダンスであるが、周期的な振動がより明確に現れている。時間領域変換で得られたインパルス応答は、剛性項・減衰項共0.1秒付近にパルスを生じている。

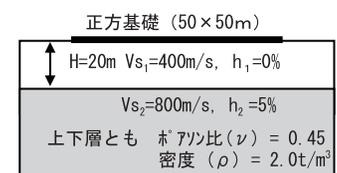


Fig.1 地盤モデル
Soil model

No.1におけるこの時間遅れは、以下のように考えることができる。地表面基礎の強制加振により波動が発生し、地下に伝播する。一様地盤であればそのまま逸散してしまうが、成層地盤では地下の層境界で反射して戻って来て、地表面基礎を再度揺らそうとする反力を生じる。これがインパルス応答の時間遅れ成分として現れており、時間遅れは波動の往復時間に対応する。この地盤モデルでは表層のせん断波速度 V_s が400m/s、表層厚20mのため、時間遅れは0.1秒となる。

No.2では、地中点位置の加振により発生した波動が地中を伝播し、地表面位置に到達してその点を揺らそうとする反力に相当するものと考えられる。このモデルの0.1秒の時間遅れは、地中点位置から地表面位置への波動伝播に要する時間と考えられる。反力は加振と同時に生じないため、基本的には同時成分は現れない（微小な値が出ているが数値的原因と考えられる）。これらの結果、インピーダンスは周期的調和波動に近い性状となる。インピーダンスマトリクスの非対角成分には、上記のような時間遅れに対応する周期的振動が良くみられる。

また、No.1, 2の共通の特性として、減衰項時間遅れ成分の影響が無視できないという点がある。このような問題に対しては、剛性項と減衰項の2種のインパルス応答を用いる本提案変換法の有用性が特に高いと考えられる。

Table 3 これまでの代表的な変換例
Typical transform examples in previous studies

No.	検討対象の物理的イメージ	変換する複素関数 (インピーダンス)	変換で得られたインパルス応答		時間遅れ成分のみで再現された複素関数
			0次係数項 (剛性項)	1次係数項 (減衰項)	
1	<p>成層地盤上剛基礎の水平地盤ばね</p>				
2	<p>地盤ばねマトリクスの非対角項</p>				
3	<p>断面が指数関数的に増大する半無限材の動的剛性</p>				
4	<p>剛基盤上に表層を有する場合の側面地盤ばね</p>				
5	<p>Maxwell 要素</p>				
6	<p>粘弾性ダンパー</p>				
7	<p>Biot モデル</p>				
8	<p>因果的履歴減衰モデル (因果的単位虚数関数)</p>				

注) 横軸の単位はインピーダンスでは Hz, インパルス応答は秒。縦軸の単位は No.1~7 が $\times 10^9$ N/m, No.8 は無次元。

なお、これ以外のインピーダンス (No.3~8) では減衰項時間遅れ成分は小さい。

3.2 遮断振動数を有するインピーダンス (No.3,4)

No.3は断面が指数関数的に増大する半無限材の頂部動的剛性²⁷⁾であり、遮断振動数(Cut-off frequency)を有する(ある振動数以下で逸散減衰がほぼ0となる)問題の代表例として良く知られている。この問題では、インピーダンスと共にインパルス応答の理論値も得られている。インピーダンス $S(\omega)$ 、インパルス応答 $G(t)$ を各々(16)、(17)式で示す。

$$S(\omega) = \frac{E \cdot A_0}{2x_0} \left[1 + \sqrt{1 - 4a_0^2} \right] \quad (16)$$

$$G(t) = \frac{E \cdot A_0}{x_0} \left[\frac{1}{2} \delta(t) + \frac{x_0}{C_0} \cdot \frac{d(\delta(t))}{dt} + \frac{1}{2t} J_1\left(\frac{C_0}{x_0} \cdot t\right) \right] \quad (17)$$

ここで、 $a_0 = \frac{\omega \cdot x_0}{C_0}$ 、 $C_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

ここで E はヤング係数、 ρ は質量密度、 J_1 は1次1種ベッセル関数である。(17)式の第1項・第2項が各々剛性・減衰の同時成分である。第3項は剛性の時間遅れ成分である。

(17)式のインパルス応答の理論値は時刻 t に関する連続量として与えられているのに対し、提案法により得られるインパルス応答は、 Δt ごとの離散値である。そこで理論値を(18)式で変換し、提案法で得られたインパルス応答がこれと良く対応することを確認した²⁾。

$$G'(t_j) = \int_{t_j - \frac{\Delta t}{2}}^{t_j + \frac{\Delta t}{2}} G(t) dt \quad (t_j = \Delta t \cdot j) \quad (18)$$

No.4は、剛基盤上の粘弾性表層に埋込まれた側面地盤の動的剛性であり、No.3と同様に遮断振動数を有する問題として知られている。Tajimi²⁸⁾は剛基礎のロッキング振動解析を行い、理論解を算定した。原田等²⁹⁾は、これを改良し地中部側壁部の単位層厚あたりのばねとして表し、この分布が深さ方向でほぼ一定となることを示した。

(19)式に、原田のばねのインピーダンスを示す。ここで、 H は表層厚、 V_S は表層のせん断波速度、 r_0 は基礎の等価半径、 μ は地盤のせん断弾性係数、 h は層の減衰率、 ν はポアソン比、 $K_n(\cdot)$ は n 次の変形ベッセル関数である。

$$K_H(\omega) = \frac{8r_0^2 \mu}{H^2} \cdot \sum_n \frac{\xi_n^2 \cdot \Omega_n}{n^3} \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} \quad (n=1, 3, 5 \dots N) \quad (19)$$

ここで、

$$\Omega_n = \frac{4K_1(\gamma_R)K_1(\beta_R) + \beta_R K_1(\gamma_R)K_0(\beta_R) + \gamma_R K_0(\gamma_R)K_1(\beta_R)}{[\gamma_R K_0(\gamma_R) + K_1(\gamma_R)] \cdot [\beta_R K_0(\beta_R) + K_1(\beta_R)] - K_1(\gamma_R)K_1(\beta_R)}$$

$$\beta_R = \beta_n r_0, \quad \gamma_R = \gamma_n r_0$$

$$\beta_n = \frac{\pi}{2H} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+2i \cdot h}} \cdot \xi_n, \quad \gamma_n = \frac{\pi}{2H} \cdot \sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1+\nu)}} \cdot \xi_n \quad (20)$$

$$\xi_n = \sqrt{(1+2i \cdot h)n^2 - (\omega/\omega_g)^2}, \quad \omega_g = \frac{\pi V_S}{2H}$$

No.3とNo.4のインパルス応答は、ほぼ同様の性状を示す。剛性項は同時成分と時間遅れ成分を有し、後者は時間遅れの増加に伴い振動しながら0に収束する。減衰項はほぼ同時成分のみとなる。時間遅れ成分のみを用いて再現したインピーダンスにおいても両者はほぼ同一の形状となっている。

3.3 Maxwell要素、粘弾性体及び類似のインピーダンス (No.5~8)

No.5のMaxwell要素は、ばね(K_0)とダッシュポット(C_0)が直列に結ばれたもので、その特性は緩和時間 $\tau_r = C_0/K_0$ で表される。インピーダンスは(21)式で表される。 $\omega=0$ のとき実部虚部とも0となり、 $\omega \rightarrow \infty$ では実部は K_0 に、虚部は $K_0/(\tau_r \omega)$ に漸近する。インパルス応答理論値は(22)式となり、同時成分・時間遅れ成分とも剛性項のみで減衰項はない。No.3と同様、インパルス応答理論値を(18)式で離散値に変換し、提案法で得られたインパル

ス応答がこれと良く対応することを確認した²⁾。

$$S(\omega) = K_0 \left(1 - \frac{\frac{1}{\tau_r}}{1\omega + \frac{1}{\tau_r}} \right) \quad (21)$$

$$G(t) = K_0 \left(\delta(t) - \frac{e^{-\frac{t}{\tau_r}}}{\tau_r} \right) \quad (22)$$

No.6は笠井等²⁶⁾がアクリル系材料の実験結果より同定した構成則である。貯蔵剛性 $G'(\omega)$ 及び損失係数 $\eta(\omega)$ は(23), (24)式で表され、この材料のパラメータとして $a=5.60 \times 10^{-5}$, $b=2.10$, $\mu=3.92 \times 10^3 \text{N/m}^2$, $\alpha=0.558$ が得られている。

$$G'(\omega) = \mu \frac{1 + ab\omega^{2\alpha} + (a+b)\omega^\alpha \cos(\alpha\pi/2)}{1 + a^2\omega^{2\alpha} + 2a\omega^\alpha \cos(\alpha\pi/2)} \quad (23)$$

$$\eta(\omega) = \frac{(-a+b)\omega^\alpha \sin(\alpha\pi/2)}{1 + ab\omega^{2\alpha} + (a+b)\omega^\alpha \cos(\alpha\pi/2)} \quad (24)$$

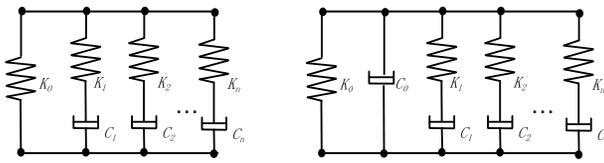


Fig.2 一般化Maxwell要素の例
Examples of generalized Maxwell elements

No.7は、一般化Maxwell要素の極限であるBiotモデル³⁰⁾である。インパルス応答の剛性項は、No.5, 6と相似である。No.8は振動数依存の小さい減衰モデル(因果的履歴減衰モデル)の主要成分である、因果的単位虚数関数(振動数領域の虚数単位 i を近似し時間領域化したもの)である。

変換で得られたNo.5~8のインパルス応答は、以下の特徴がある。

- 1) 0次係数項では、時間遅れ成分は有意な値となり、図の負側に生じ時間遅れの増加と共に0に収束する。同時成分は、No.5~7では正の有意な値となるが、No.8では0である。
- 2) 1次係数項では、時間遅れ成分は微小である。

この結果、時間遅れ成分のみで再現されたNo.5~8のインピーダンスは類似の形状となっており、これらの振動数依存性が同種のものであると考えられる。No.6の粘弾性ダンパーは、Fig.2の一般化Maxwell要素による近似が良く行われる(例えば文献31)が、この結果と整合している。

4 変換法の適用性の検討

前章で示したように、これまで時間領域変換を行ってきた振動数領域の関数は、主に剛性の次元を持つインピーダンス関数だった。本章では、これ以外の関数の時間領域変換を試み、変換法の適用性を検討する。変換は全てC法とする。検討の対象としては、インピーダンス関数の逆数であるコンプライアンス関数と、伝達関数を用いることとする。

4.1 コンプライアンス関数の変換の検討

まず、最も単純な例としてVoigtモデルのコンプライアンス関数について検討を行う。さらにより現実的な例として、二層地盤上の剛基礎の動的地盤柔性について検討する。

4.1.1 Voigtモデルのコンプライアンス関数

Voigt要素は、ばね(K_0)とダッシュポット(C_0)が並列に結ばれたもので、そのインピーダンスは $(K_0 + i\omega C_0)$ で与えられる。 $\tau_r = C_0/K_0$ とすれば、その逆数であるコンプライアンスは(25)式となり、そのインパルス応答は解析的に(26)式となる。(25)式は、Maxwell要素のインピーダンスの正則成分((21)式の第2項)と、係数が $-K_0$ と $1/K_0$ の差異があるだけで類似な形である。インパルス応答も同様に類似な式となる。

$$S(\omega) = \frac{1}{i\omega \cdot C_0 + K_0} = \frac{C_0}{i\omega + \frac{K_0}{C_0}} = \frac{1}{K_0} \cdot \frac{1}{i\omega + \frac{1}{\tau_r}} \quad (25)$$

$$G(t) = C_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_r}} \quad (26)$$

Fig.3に $\tau_r = 1$ とし、0.25Hzから10Hzまで0.25Hz刻みで算定したコンプライアンス関数を●○で示す。またFig.4に $\Delta t = 0.1$ (s), $n' = 20$ として変換されたインパルス応答を●で示す。これより再現されたコンプライアンス関数をFig.3の実線で示す。再現された値は変換前の値と概ね良く対応していることから、変換が良好に行われたものと考えられる。

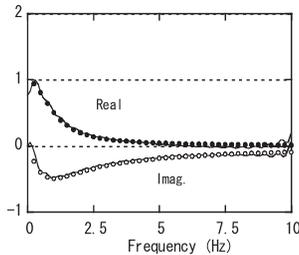


Fig.3 Voigtモデルのコンプライアンス関数
Compliance function of Voigt model

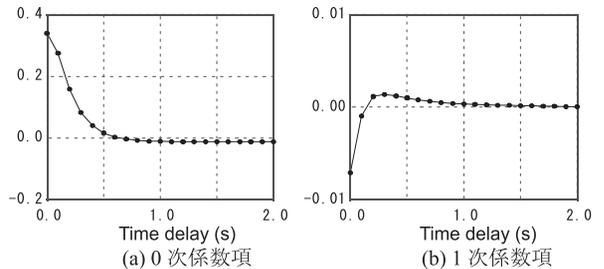


Fig.4 時間領域変換により得られたインパルス応答
Impulse response functions obtained by time domain transform

4.1.2 二層地盤上剛基礎のコンプライアンス関数

地盤モデルをFig.1とする。薄層要素法により0.5Hzから20Hzまで0.5Hz刻みで算定された水平・回転インピーダンスをFig.5に示す。これより算定されたコンプライアンス関数をFig.6に示す。コンプライアンスを $\Delta t = 0.05$ (s), $n' = 5$ として時間領域変換して得られたインパルス応答をFig.7, 8に示す。

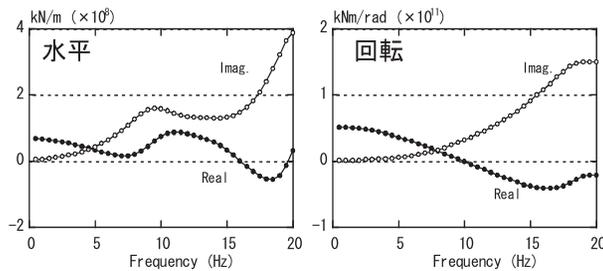


Fig.5 二層地盤のインピーダンス
Impedance function for 2 layered soil

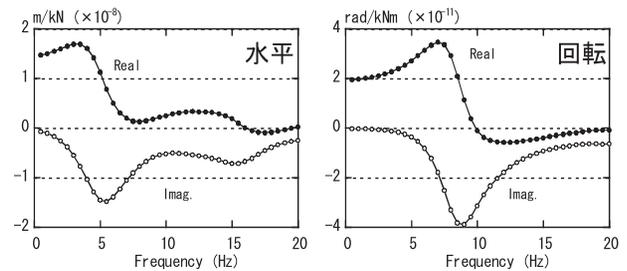


Fig.6 二層地盤のコンプライアンス
Compliance function for 2 layered soil

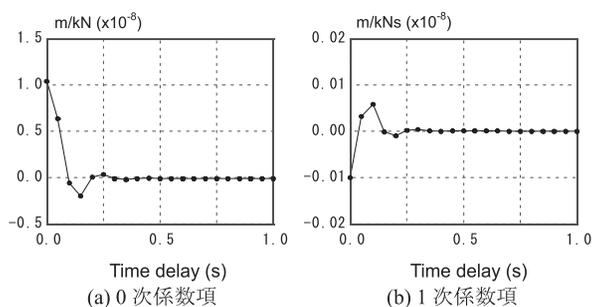


Fig.7 算定されたインパルス応答 (水平成分)
Obtained impulse response (horizontal)

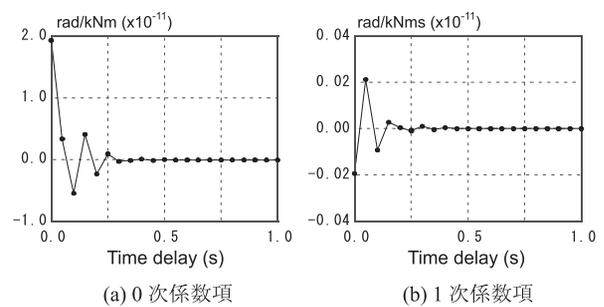


Fig.8 算定されたインパルス応答 (回転成分)
Obtained impulse response (rotational)

また、これらより振動数領域で再現されたコンプライアンス関数をFig.9の実線で示す。再現された関数は変換前のデータ (図中の●○) と良く対応しており、変換が良好に行われたことが確認できる。

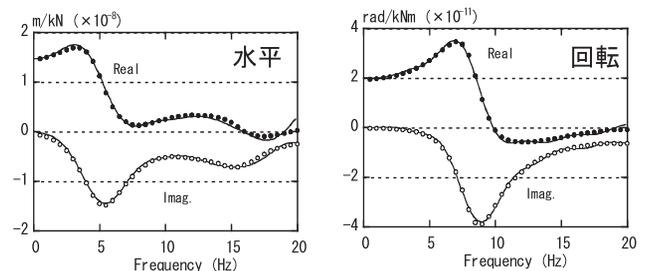


Fig.9 コンプライアンス関数の再現
Reconstruct of compliance function

4.2 伝達関数の変換の検討

4.2.1 1自由度系の伝達関数

地動を受ける1自由度系の運動方程式は、(27)式のように書ける。ここで、 m, c, k はそれぞれ質量、減衰係数、剛性である。また、 y_0 は地動変位、 x は地動からの相対変位である。

$$m(x'' + y_0'') + cx' + kx = 0 \quad (27)$$

振動数領域で、地動加速度に対する応答加速度の比（加速度伝達関数。以下、伝達関数という）は、下式の $S_a(\omega)$ で表される。

$$S_a(\omega) = \sqrt{\frac{1 + 4h^2\beta^2}{|1 - \beta^2|^2 + 4h^2\beta^2}} \cdot \exp(-i\phi) \quad (28)$$

ここで、

$$\beta = \omega/\omega_0, \quad \omega_0 = \sqrt{k/m} \quad (29)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left[\frac{2h\beta^3}{1 - (1 - 4h^2)\beta^2} \right] \quad (30)$$

検討に用いる伝達関数は、 $\omega_0 = 2\pi, h = 10\%$ とし(28)式を用いて0.05Hz刻みで2.5Hzまで50個算定 (Fig.10の●○)し、これを $\Delta t = 0.4$ (s)、 $n = 20$ として時間領域に変換した。得られたインパルス応答をFig.11に示す。剛性項と減衰項がともに有意な値を持ち、ともに振動しながら0に収束する性状となっている。また、このインパルス応答より再現された伝達関数をFig.10の実線で示す。もとの値と良好に対応していることが確認できる。

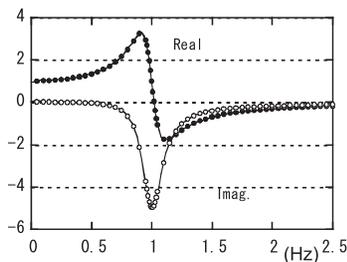


Fig.10 検討に用いた伝達関数
Studied transfer function

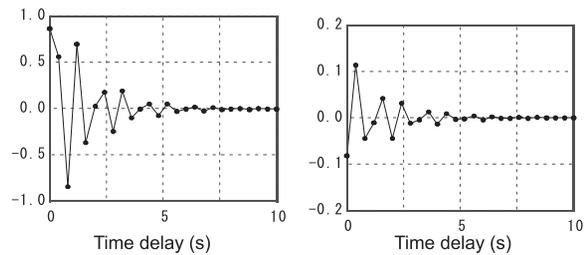


Fig.11 算定されたインパルス応答
Obtained impulse response

4.2.2 地盤建屋連成系の伝達関数

より現実的な問題の一例として、二層地盤上の建屋の伝達関数について検討する。建屋は底面 50×50 m、質量67,000tの構造物とする。建屋モデルの諸定数をTable 4に示す。地盤は、前節Fig.1に示した二層地盤とする。薄層要素法により算定した地表面剛基礎の水平・回転インピーダンス (Fig.5参照)を用いる。

Table 4 建屋モデルの諸定数
Building model data

節点番号	重量 (t)	回転慣性 ($\times 10^4 \text{tm}^2$)	せん断断面積 (m^2)	断面2次モーメント ($\times 10^4 \text{m}^4$)
1	7000	10	70	20
2	10000	15	90	30
3	10000	20	120	40
4	12000	20	150	50
5	7000	15	150	50
6	13000	20	2500	400
7	8000	10		

$E = 2.55E^7 \text{ kN/m}^2, \nu = 0.167, h = 0\%$

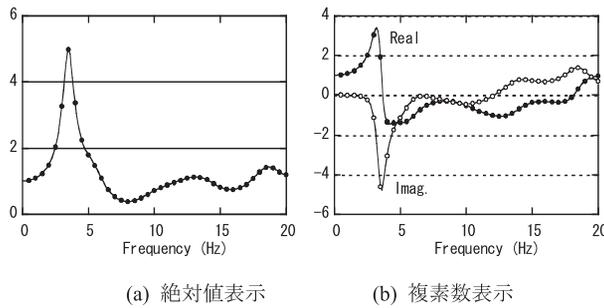


Fig.12 応答解析で得られた伝達関数と変換に用いるデータ点
Transfer function obtained by response analysis and data points for transform

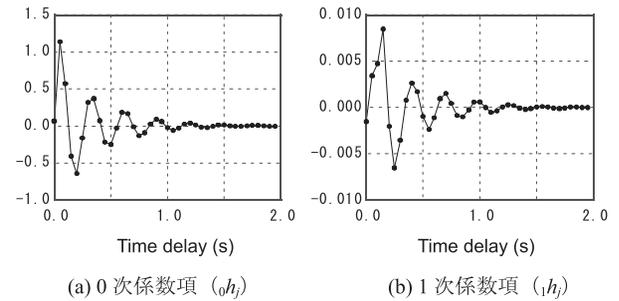


Fig.13 算定されたインパルス応答（時間領域伝達関数）
Obtained impulse response (Time domain transfer function)

水平自由度と回転自由度は非連成とする。地盤入力地震動は、El Centro1940NS（時間刻み $\Delta T=0.01$ 秒、継続時間10.24秒）の最大加速度を300Galとして地表面位置で定義する。応答結果の精度を明確にするため地盤と建屋の内部減衰は0とする。

応答解析は、地盤インピーダンスを考慮した周波数応答解析を実施し、入力地震動に対する各節点の伝達関数を算定する。周波数応答解析の解析範囲は0~20Hz、解析周波数刻み (Δf) は0.0977Hzとする。

Fig.12に建屋頂部節点の伝達関数（応答の絶対加速度/入力地震動の加速度）を絶対値と複素数で示す。これを時間領域に変換する。変換に用いるデータは、0.5~20Hzで0.5Hz刻みの40点とする。

Fig.13に、時間領域変換で得られたインパルス応答（時間領域の伝達関数）を示す。4.2.1の結果と同様、0次、1次係数項とも振動しながら0に収束する性状となっている。

次に、得られた時間領域伝達関数を用いた応答解析を試みる。Fig.14に解析のフローを示す。伝達関数を用いて応答解析を行う場合、通常は入力地震動をフーリエ変換し、振動数領域で伝達関数を乗じ、逆フーリエ変換により時間領域へ戻す (Fig.14の斜線矢印の方法)。これに対し、本インパルス応答を用いれば、同図の黒矢印の方法により、時間領域のままに応答波の算定が可能である。

この方法により、入力地震動時刻歴波とFig.13の時間領域伝達関数のうち同時成分 (${}_0h_0, {}_1h_0, {}_2h_0$) と1秒以下の時間遅れ成分 (${}_0h_1 \sim {}_0h_{20}, {}_1h_1 \sim {}_1h_{20}$) を用いて、建屋頂部節点の加速度応答波の算定を行った。(31)式に算定式を示す。ここで $x(t)$ 、 $y(t)$ は各々、時刻 t の入力地震動の加速度と応答の加速度、 $t_j = j\Delta t$ 、 $\Delta t = 0.05$ 秒である。ここで Δt はインパルス応答の時間刻みであり、入力地震動の時間刻み $\Delta T = 0.01$ 秒とは異なることに注意する。

$$y(t) = {}_2h_0 \cdot \ddot{x}(t) = {}_1h_0 \cdot \dot{x}(t) + {}_0h_0 \cdot x(t) + \left\{ \sum_{j=1}^{20} {}_1h_j \cdot \dot{x}(t-t_j) + \sum_{j=1}^{20} {}_0h_j \cdot x(t-t_j) \right\} \quad (31)$$

Table 5に本計算法で得られた最大応答値と周波数応答解析結果の比較を示す。応答値、発生時刻とも両者は良好に対応している。Fig.15に0~5秒の加速度応答波形の比較を示す。3秒から4秒の間でわずかな差異が見られるものの、両者は極めて良好に対応しているといえる。詳細は文献32を参照されたい。

以上より、本計算法の計算結果が妥当であることが確認できた。本計算法は、伝達関数を変化させることにより非線形計算にも対応可能であるなど、従来の応答計算法に新たな選択肢を加えるものと考えられる。

Table 5 最大応答値の比較
Comparison of maximum response values

	従来方法 (周波数 応答解析)	本計算法 (時間領域 伝達関数)	比率
最大応答加速度 (Gal)	725.0	743.9	1.026
発生時刻 (s)	2.52	2.52	-

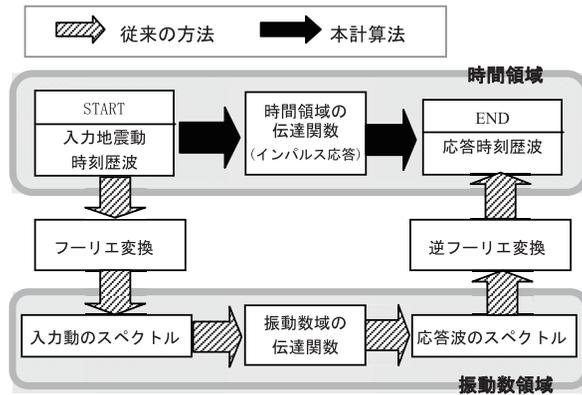


Fig.14 時間領域伝達関数を用いた応答計算のフロー
Flowchart of response calculation using time domain transfer function

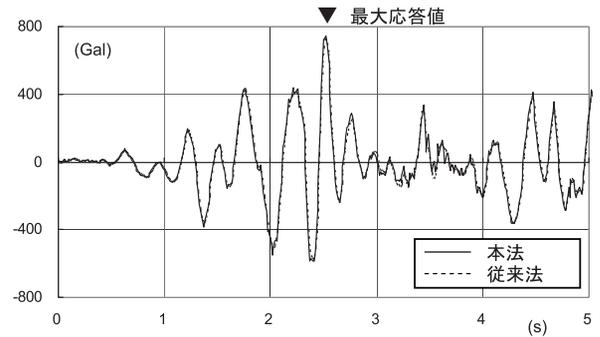


Fig.15 加速度応答波形の比較
Comparison of acceleration wave forms

5 まとめ

本報では、以下の検討を行った。

まず、これまでに提案された変換法の概要をより一般的な表現で示し、その特徴を整理した。次に、これまで変換してきた代表的な8個の関数を3種類に分類し、それらの特徴を整理した。また、一般的な関数の代表例として動的柔軟性と伝達関数の時間領域変換を行い、適用性を評価した。前者については、Voigtモデルと二層地盤のコンプライアンス関数を検討し、良好に変換できることを確認した。また後者については、1自由度系と地盤建屋連成系の加速度伝達関数を検討し、良好に変換できることを確認した。さらに、変換で得られた時間領域伝達関数を用いれば、フーリエ変換を行わないで時間領域で応答計算が可能であり、応答結果の精度も極めて良好であることを示した。

参考文献

- 1) 中村尚弘：周波数依存性を有する地盤インピーダンスの時間領域変換に関する研究，構造工学論文集，Vol.48B，pp.445-452，2002.3
- 2) 中村尚弘：インピーダンスの時間領域変換法に関する基礎的検討，第11回日本地震工学シンポジウム，Paper No.227，pp.1217-1222，2002.11
- 3) Naohiro Nakamura: A Study on Nonlinear Seismic Response Analysis of Buildings Considering Frequency Dependent Soil Impedance in Time Domain, An International Journal of Interaction and Multiscale Mechanics, Vol.2, No.1, pp.91-107, 2009.3
- 4) 中村尚弘：地盤インピーダンスの時間領域変換による成層地盤に埋込まれた構造物の地震応答解析 その1 埋込みSRモデルに基づく応答解析，日本建築学会構造系論文集，No.567，pp.63-70，2003.5
- 5) 中村尚弘：地盤インピーダンスの時間領域変換による成層地盤に埋込まれた構造物の地震応答解析 その2 変換法の改良及び離散的な地盤解析モデルに基づく応答解析，日本建築学会構造系論文集，No.574，pp.99-106，2003.12
- 6) Naohiro Nakamura: Seismic Response Analysis of Deeply Embedded Nuclear Reactor Buildings Considering Frequency Dependent Soil Impedance in Time Domain, Nuclear Engineering and Design, Vol.238, pp.1845-1854, 2008.7
- 7) 中村尚弘：大きな履歴減衰を有する複素剛性の時間領域変換法，日本建築学会構造系論文集，No.587，pp.117-123，2005.1
- 8) Naohiro Nakamura: A Practical Method to Transform Frequency Dependent Impedance to Time Domain, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 35, pp.217-231, 2006.2
- 9) Naohiro Nakamura: Improved Methods to Transform Frequency Dependent Complex Stiffness to Time Domain, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 35, pp.1037-1050, 2006.7
- 10) 中村尚弘：因果的履歴減衰の実用的評価法 —複素減衰の簡便な時間領域近似表現の試み—，日本建築学会構造系論文集，No.596，pp.33-39，2005.10

- 11) Naohiro Nakamura: Practical Causal Hysteretic Damping, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 36, pp.597-617, 2007.4
- 12) 中村尚弘：実部もしくは虚部のデータのみを用いた複素剛性の時間領域変換法, 日本建築学会構造系論文集, No.612, pp.79-86, 2007.2
- 13) Naohiro Nakamura: Transform Methods for Frequency Dependent Complex Stiffness to Time Domain Using Real or Imaginary Data Only, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 37, pp. 495-515, 2008.4
- 14) 中村尚弘：振動数と歪振幅への依存性を有する動的剛性の時刻歴応答解析法, 日本建築学会構造系論文集, No.606, pp. 139-146, 2006.8
- 15) 中村尚弘：歪と振動数に依存する動的剛性の時刻歴解析に関する基礎的検討, 第12回日本地震工学シンポジウム, Paper No.0134, 2006.11
- 16) Naohiro Nakamura: Time history Response Analysis Considering Dynamic Stiffness with Both Frequency and Strain Dependencies, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol.134, Issue 4, pp.530-541, 2008.7
- 17) 中村尚弘・鈴木琢也・笠井和彦・大木洋司：振動数・温度・歪レベルに依存する粘弾性ダンパーの実用的な時刻歴応答解析法, 日本建築学会構造系論文集, No. 640, pp 1063-1072, 2009.6
- 18) Lysmer, J., Udaka, T., Seed, H. B. and Hwang, R.N.:FLUSH A Computer Program for Approximate 3-D Analysis of Soil-structure Interaction Problems, Report No.EERC75-30, University of California, Berkeley, 1975
- 19) Waas, G.: Earth Vibration Effects and Abatement for Military Facilities Analysis Method for Footing Vibrations through Layered Media, Technical Report S-71-14, U.S.Army Engineer Waterways Experiment Station, 1972
- 20) Kausel, E.: Forced Vibration of Circular Foundations on Layered Media, Research Report R74-11 Soils Publication No. 336, Dept. of Civil Eng., M.I.T., 1974
- 21) Lysmer, J., Udaka, T., Tsai, C.-F. and Seed, H. B.:ALUSH A Computer Program for Seismic Response Analysis of Axisymmetric Soil-structure Systems, Report No.EERC75-31, University of California, Berkeley, 1975
- 22) 中村尚弘：時間領域に変換したエネルギー伝達境界を用いた地盤-建物連成系の地震応答解析, 日本建築学会構造系論文集, No. 626, pp.559-566, 2008.4
- 23) Naohiro Nakamura: Nonlinear Response Analysis of Soil-Structure Interaction System Using Transformed Energy Transmitting Boundary in the Time Domain, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol.29, pp.799-808, 2009.5
- 24) 林康裕・勝倉裕：周波数領域の地盤柔性を用いた地盤・建屋相互作用系の時刻歴応答解析, 日本建築学会構造系論文報告集, 第413号, pp.65-74, 1990.7
- 25) 和泉正哲・薛松濤・飛田潤・半沢徹也：減退記憶理論による粘弾性体中の波動減衰, 日本建築学会構造系論文報告集, No.417, pp.101-107, 1990.11
- 26) 笠井和彦・寺元道彦・大熊潔・所健：粘弾性体の温度・振動数・振幅依存を考慮した構成則（その1：線形領域における温度・振動数依存のモデル化）, 日本建築学会構造系論文集, No.543, pp.77-86, 2001.5
- 27) Wolf, J. P. and Obernhuber, P. :Nonlinear Soil-Structure-Interaction Analysis Using Dynamic Stiffness or Flexibility of Soil in the Time Domain, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.13, pp.195-212, 1985
- 28) Tajimi,H. :Dynamic Analysis of Structure Embedded in an Elastic Stratum, Proc. 4th World Conference on Earthquake Engineering, A-6, pp.53-69, 1969
- 29) 原田隆典・久保慶三郎・片山恒雄・廣瀬利光：地中円筒剛体基礎の動的ばね係数と減衰係数, 土木学会論文報告集, 第339号, pp.79-88, 1983.11
- 30) 東野雅彦・山本雅史・浅野三男：粘弾性ダンパーの力学特性, その1～3, 日本建築学会大会梗概集, No.511, pp.963-968, 1999.9
- 31) 中村尚弘：Biotモデルとの比較による因果的履歴減衰モデルの特性検討, 日本建築学会構造系論文集, No.611, pp.63-70, 2007.1
- 32) 中村尚弘：振動数依存性を有する関数の時間領域変換法に関する基礎的検討—Duhamel積分との関係及び時間領域伝達関数について—, 日本建築学会構造系論文集, No. 253, pp.1237-1246, 2010.07